Exercice 1: Les polynômes constants sont solutions de cette équation.
Cherchons des solutions de degré supérieur à 1.
Analyse : Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur à 1 et solution de $P \circ P = P$.
Alors, $\deg(P \circ P) = \deg(P)$.
Or, $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2$. Donc $\deg(P)^2 = \deg(P)$ donc $\deg(P) = 1$.
D'où $P = a_0 + a_1 X$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ et $a_1 \in \mathbb{K}^*$.
$P \circ P = a_0 + a_1 P = a_0 + a_1(a_0 + a_1 X) = a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 X$.
D'où $a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 X = a_0 + a_1 X$. D'où $\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 a_0 = a_0 \\ a_1^1 = a_1 \end{array} \right.$. D'où $\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{array} \right.$ Conclusion : $P = X$.
Synthèse : $P = X$ est solution du problème.
Finalement, l'ensemble des solutions est $\{X\} \cup \{a, a \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 2: On va utiliser que $(1+X)^{2n} = ((1+X)^n)^2$.
Par le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (1+X)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k \\ (1+X)^n.(1+X)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \right)^2 \end{aligned}$$

On va identifier les coefficients devant X^n dans ces deux polynômes.
Dans la première écriture, le coefficient est $\binom{2n}{n}$.
Dans la deuxième écriture, le coefficient est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
Par unicité des coefficients, on obtient que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 3:

1. On trouve $Q = 2X^2 + 3X + 11$ et $R = 25X - 5$.
2. On trouve $Q = X^3 + 1$ et $R = X^2$.
3. On trouve $Q = X^2 + (1 - 2\mathbf{i})X - 2 - 3\mathbf{i}$ et $R = -5 - \mathbf{i}$.

Exercice 4: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq b$.

1. Le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ affirme qu'il existe 2 polynômes Q et R tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} P = (X-a)(X-b)Q + R \\ \deg(R) < 2 \end{array} \right.$$

$\exists (c, d) \in \mathbb{K}^2, \quad R = cX + d$. La première ligne devient

$$P = (X-a)(X-b)Q + cX + d$$

On cherche à déterminer c et d donc on a besoin de 2 équations. On évalue P en a et en b

$$\left\{ \begin{array}{l} P(a) = ca + d \\ P(b) = cb + d \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{P(a)-P(b)}{a-b} \\ d = P(b) - cb = P(b) - \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b} \times b \end{array} \right.$$

Le reste dans la division euclidienne est donc
$R = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b} X + P(b) - \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b} b$.

2. Le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ affirme qu'il existe 2 polynômes Q et R tels que

$$\left\{\begin{array}{l} P=(X-a)^2Q+R \\ \deg(R)<2 \end{array}\right.$$

$\exists(c,d)\in\mathbb{K}^2,\ \ R=cX+d$. La première ligne devient

$$P=(X-a)^2Q+cX+d$$

On évalue en a et on obtient $P(a)=ca+d$. Il nous faut une autre équation, on va s'intéresser au polynôme dérivé de P.

$$P'=2(X-a)Q+(X-a)^2Q'+c$$

On évalue en a et on obtient $P'(a)=c$. Nos deux équations sont donc

$$\left\{\begin{array}{l} P(a)=ca+d \\ P'(a)=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=P'(a) \\ d=P(a)-ca=P(a)-P'(a)a \end{array}\right.$$

Le reste dans la division euclidienne est donc
$R=P'(a)X+P(a)-P'(a)a=P'(a)(X-a)+P(a)$.

Exercice 5: Le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ affirme qu'il existe 2 polynômes Q et R tels que

$$\left\{\begin{array}{l} X^n+2X-2=(X-1)^2Q+R \\ \deg(R)<2 \end{array}\right.$$

$\exists(c,d)\in\mathbb{K}^2,\ \ R=cX+d$. La première ligne devient

$$X^n+2X-2=(X-1)^2Q+cX+d$$

On cherche à déterminer c et d donc on a besoin de 2 équations. On évalue en 1 et on obtient $1=c+d$. Il nous faut une autre équation, on va s'intéresser au polynôme dérivé de P.

$$nX^{n-1}+2=2(X-1)Q+(X-1)^2Q'+c$$

On évalue en 1 et on obtient $n+2=c$. Nos deux équations sont donc

$$\left\{\begin{array}{l} 1=c+d \\ n+2=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=n+2 \\ d=1-c=-n-1 \end{array}\right.$$

Le reste dans la division euclidienne est donc $R=(n+2)X-n-1$.

Exercice 6:

1. $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta)$.

2. Le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ affirme qu'il existe 2 polynômes Q et R tels que

$$\left\{\begin{array}{l} (\cos(\theta)+X\sin(\theta))^n=(X^2+1)Q+R \\ \deg(R)<2 \end{array}\right.$$

$\exists(c,d)\in\mathbb{R}^2,\ \ R=cX+d$. La première ligne devient

$$(\cos(\theta)+X\sin(\theta))^n=(X^2+1)Q+cX+d$$

On cherche à déterminer c et d. On va évaluer en $\mathbf{i}$.

$$\begin{array}{rcl} (\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^n & = & c\mathbf{i}+d \\ \cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta) & = & c\mathbf{i}+d \end{array}$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on a $c=\sin(n\theta)$ et $d=\cos(n\theta)$. Le reste dans la division euclidienne est $R=\sin(n\theta)X+\cos(n\theta)$.

Exercice 7: Notons $Q = 2X^2 - 3X + 1$ de sorte que $P = Q(X^2)$.
Les racines de Q sont 1 et $\frac{1}{2}$. Donc $Q = 2(X-1)(X-\frac{1}{2})$.
Donc $P = 2(X^2-1)(X^2-\frac{1}{2}) = 2(X-1)(X+1)(X-\frac{1}{\sqrt{2}})(X+\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Exercice 8: Les racines de $P = X^4 + 1$ sont les racines 4-ième de -1. En regroupant les racines conjugués, on obtient :

$$P = X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Notons $Q_2 = X^2 - X + 1$ de sorte que $Q = Q_2(X^2)$. Les racines de Q_2 sont $\frac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2} = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}$ et $\frac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{2} = \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}$.
D'où $Q_2 = \left(X - \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}\right)$ et donc

$$Q = \left(X^2 - \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}\right)\left(X^2 - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}\right) = \left(X - \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X + \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X + \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{6}}\right).$$

En regroupant les racines conjuguées,

$$Q = X^4 - X^2 + 1 = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

Les racines de $R = X^5 + 1$ sont exactement les racines 5ème de -1. On connaît une de ces racines (qui est -1) donc l'ensemble des racines de R sont $\{-1; -\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}; -\mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}k\pi}{5}}; -\mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}k\pi}{5}}; -\mathbf{e}^{\frac{8\mathbf{i}k\pi}{5}}\}$ d'où

$$X^5 + 1 = (X+1)(X + \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}})(X + \mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}k\pi}{5}})(X + \mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}k\pi}{5}})(X + \mathbf{e}^{\frac{8\mathbf{i}k\pi}{5}}).$$

On regroupe les facteurs associés à des racines conjuguées pour obtenir sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

$$X^5 + 1 = (X+1)\left(X^2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right).$$

Notons $S_2 = X^2 + X + 1 = (X-j)(X-j^2)$ de sorte que $S = S_2(X^4)$. D'où $S = (X^4 - j)(X^4 - j^2)$. On détermine les racines 4-ièmes de $j = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$ et $j^2 = \mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$ afin de factoriser le polynôme.

$$S = \left(X - \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{\frac{7\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{\frac{10\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{-\frac{4\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{-\frac{7\mathbf{i}\pi}{6}}\right)\left(X - \mathbf{e}^{-\frac{10\mathbf{i}\pi}{6}}\right)$$

i.e.

$$S = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$$

Exercice 9: Soit $P = X^3 + X^2 - 8X - 12$.
Les racines de $P' = 3X^2 + 2X - 8$ sont -2 et $\frac{4}{3}$. Or -2 est également racine de P. Donc $(X+2)^2|P$. En factorisant à l'aide de la division euclidienne, on obtient $P = (X+2)^2(X-3)$.

Exercice 10:

1. $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}X^k - X^7 - 1 = 7X + 21X^2 + 35X^3 + 35X^4 + 21X^5 + 7X^6$. Donc, $\deg(P) = 6$.
   $P(0) = 0$ et $P(-1) = 0$.
   $$P(\mathbf{j}) = (1+\mathbf{j})^7 - \mathbf{j}^7 - 1 = (-\mathbf{j}^2)^7 - \mathbf{j} - 1 = -\mathbf{j}^2 - \mathbf{j} - 1 = 0$$
   Donc, $\mathbf{j}$ est une racine de P.

2. On cherche ensuite leur multiplicité. $P'(0) \neq 0$, $P'(-1) \neq 0$ et $P'(\mathbf{j}) = 0$. Donc, 0 et -1 sont racine de multiplicité 1.
   $P''(\mathbf{j}) \neq 0$ donc $\mathbf{j}$ est racine de multiplicité 2.
   On connaît donc 4 des 6 racines de P.
   De plus, P est à coefficients réels donc $\overline{j}$ est aussi racine de P de multiplicité 2.
   On a donc les 6 racines de P. D'où, $P = 7X(X+1)(X-\mathbf{j})^2(X-\bar{\mathbf{j}})^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$.

<u>Exercice 11</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. On montre que $P_n(1) = 0$, $P_n'(1) = 0$ et $P_n''(1) = 0$ donc 1 est une racine de P de multiplicité au moins 3. D'où P peut se factoriser par $(X-1)^3$.

<u>Exercice 12</u>: Soit $P = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
   α est racine multiple de P ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ ssi $\alpha^3 = -p\alpha - q$ et $3\alpha^2 = -p$ ssi $\alpha^2 = -\frac{p}{3}$ et $2p\alpha + 3q = 0$.

2. Cas $p = 0$. Si $p = 0$ alors $P' = 3X^2$. Dans ce cas, 0 est la seule racine multiple possible. Il se trouve que 0 est racine de P si et seulement si $q = 0$.
   L'équivalence est vérifiée : P possède une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$

   Cas $p \neq 0$. P possède une racine multiple si et seulement si $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^2 = -\frac{p}{3}$ et $2p\alpha + 3q = 0$ si et seulement si $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^2 = -\frac{p}{3}$ et $\alpha = -\frac{3q}{2p}$ si et seulement si $\frac{9q^2}{4p^2} = -\frac{p}{3}$ si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

<u>Exercice 13</u>: On a $x_1x_2x_3 = (-1)^3\dfrac{a_0}{a_3} = 28$ et $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} = 8$.
On sait également que $x_3 = x_1 + x_2$. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2x_3 = 8 \\ x_1x_2x_3 = 28 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 4 \\ x_1x_2 = 7 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = 7 \end{array} \right.$$

Donc x_1 et x_2 sont racines du polynômes $Q = X^2 - 4X + 7$. $\Delta = 16 - 28 = -12$. Les racines du polynômes Q sont $\dfrac{4 + \mathbf{i}\sqrt{12}}{2} = 2 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ et $\dfrac{4 - \mathbf{i}\sqrt{12}}{2} = 2 - \mathbf{i}\sqrt{3}$.

Les racines de P sont donc $2 - \mathbf{i}\sqrt{3}$, $2 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ et 4.

<u>Exercice 14</u>: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité sont les racines de $X^n - 1$. D'après les relations coefficients/racines, leur produit est égal à $(-1)^n \times (-1) = (-1)^{n+1}$ et leur somme est égale à 0.

<u>Exercice 15</u>: Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}\,.$$

D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+1)} + \frac{d}{(x+1)^2}\,.$$

Calcul de b à l'aide de $f(x)(x-1)^2$ lorsque x tend vers 1 : $b = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$.
Calcul de d à l'aide de $f(x)(x+1)^2$ lorsque x tend vers -1 : $d = \frac{-1}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{4}$.
En considérant $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x)$, on obtient $0 = a + c$.
En évaluant f en 0, on obtient $0 = -a + b + c + d = -a + c$ donc $a = c = 0$.
La décomposition en éléments simples de f est donc :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)^2}\,.$$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$.

$$g(x) = \frac{x^5+1}{x^3(x-2)} = x + \frac{2x^4+1}{x^3(x-2)} = x + 2 + \frac{4x^3+1}{x^3(x-2)}\,.$$

D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$g(x) = x + 2 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x-2}\,.$$

Calcul de c à l'aide de $g(x)x^3$ lorsque x tend vers 0 : $c = -\frac{1}{2}$.
Calcul de d à l'aide de $g(x)(x-2)$ lorsque x tend vers 2 : $d = \frac{2^5+1}{2^3} = \frac{33}{8}$.
En considérant $\lim\limits_{x\to+\infty} x(g(x) - x - 2)$, on obtient $4 = a + d$ donc $a = -\frac{1}{8}$.
En évaluant g en 1, on obtient $-2 = 1 + 2 + a + b + c - d$ donc $b = -\frac{1}{4}$.
La décomposition en éléments simples de g est donc :

$$g(x) = x + 2 + \frac{-\frac{1}{8}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^3} + \frac{\frac{33}{8}}{x-2}\,.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$h(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2+1}{(x - e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}})(x - e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}})(x - e^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}})(x - e^{-\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}})} = \frac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,.$$

D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$h(x) = \frac{ax+b}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{cx+d}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,.$$

En remettant sur le même dénominateur, on obtient par identification des coefficients $b + d = 1$.
On a $h(x) = h(-x)$ donc $a = -c$ et $b = d$ donc $b = d = \frac{1}{2}$.
Par identification des coefficients, on obtient $a = 0$. La décomposition en éléments simples de h est donc :

$$h(x) = \frac{\frac{1}{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,.$$

Exercice 16: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}\,.$$

On trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\,.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\,.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}$.

Exercice 17:

1. D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$f : x \mapsto \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-2}$$

On détermine les coefficients $a = -2$, $b = -1$ et $c = 2$. Donc

$$f : x \mapsto \frac{-2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-2}$$

Donc une primitive de f est

$$F : x \mapsto -2\ln(|x-1|) + \frac{1}{x-1} + 2\ln(|x-2|)$$

2. D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$g : x \mapsto \frac{x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

On détermine les coefficients $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ et $c = \frac{1}{3}$. Donc

$$g : x \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}\right)$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{-x+1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \sqrt{3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}$$

Donc une primitive de g est

$$G : x \mapsto \frac{1}{3}\left(\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

Exercice 18: La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 0; 1\}$ par quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0; 1\}$, $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0; 1\}$,

$$f^{(k)}(x) = -\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} + \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}\right)$$

Exercice 19: Soit $\theta \in]0; \pi[$. Le polynôme $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ a pour discriminant $4\cos^2(\theta) - 4 < 0$, donc $x \mapsto x^2 - 2x\cos(\theta) + 1$ ne s'annule jamais et est une fonction polynomiale donc $\mathscr{C}^\infty$. On en déduit que

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} = \frac{1}{(x - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})(x - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{C}\backslash\{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}; \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}\}$,

$$\frac{1}{(x - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})(x - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})} = \frac{a}{x - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} + \frac{\overline{a}}{x - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}} \text{ où } a \in \mathbb{C}$$

Calcul de a en multipliant par $(x-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})$ puis en prenant la limite lorsque x tend vers $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$: $a=\frac{1}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}=\frac{1}{2\mathbf{i}\sin(\theta)}$.
Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{-\mathbf{i}}{2\sin(\theta)}\left(\frac{1}{x-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}-\frac{1}{x-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}\right)$$

On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{-\mathbf{i}}{2\sin(\theta)}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})^{n+1}}\right)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{2\sin(\theta)}\mathbf{i}\frac{(x-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})^{n+1}-(x-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^{n+1}}{(x^2-2x\cos(\theta)+1)^{n+1}}$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})^{n+1}-(x-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^{n+1}&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k\theta}x^{n+1-k}-\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}x^{n+1-k}\\&=-2\mathbf{i}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\sin(k\theta)x^{n+1-k}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\sin(k\theta)x^{n+1-k}}{\sin(\theta)(x^2-2x\cos(\theta)+1)^{n+1}}$$

<u>**Exercice** 20:</u> Cette fonction rationnelle admet comme pôle simple les racines n-ième de l'unité. Soit $x\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{U}_n$.

$$\frac{1}{x^n-1}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}}.$$

D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $(a_k)_{k\in\{0,\dots,n-1\}}\in\mathbb{C}^n$ tels que :

$$\frac{1}{x^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{x-e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}}.$$

Soit $k\in\{0,...,n-1\}$, on détermine a_k à l'aide de $x\mapsto\dfrac{1}{nx^{n-1}}$ évaluée en $e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}$: $a_k=\dfrac{1}{ne^{-\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}}$.
D'où

$$\frac{1}{x^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}}{x-e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}}.$$

Si n est impair,

$$\frac{1}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x-1}+2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})x-1}{x^2-2\cos(\frac{k\pi}{n})x+1}\right)$$

Si n est pair,

$$\frac{1}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})x-1}{x^2-2\cos(\frac{k\pi}{n})x+1}\right)$$

Exercice 21:

1. $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$.

2. On le démontre par récurrence, à l'aide d'une récurrence double.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ P(n)\ :\ \text{"}\deg(T_n) = n \text{ et le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^{n-1}\text{"}$$

   - Initialisation: On a $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.
   - Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.
     $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n)$.
     Or, par hypothèse de récurrence et règle sur le degré d'un produit,
     $\deg(2XT_{n+1}) = n + 2$ et $\deg(T_n) = n$.
     Ces deux polynômes sont de degré différent donc $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = n + 2$ et le coefficient dominant de T_{n+2} est celui de $2XT_{n+1}$ c'est-à-dire 2^{n+2}. D'où $P(n + 2)$ est vraie.
   - Conclusion: On a donc démontré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.

3. On pose l'hypothèse de récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.

$$P(n)\ :\ \text{"}\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)\text{"}$$

   - Initialisation: On a $T_0 = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ T_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0x)$.
     $T_1 = X$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ T_1(\cos(x)) = \cos(x)$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
   - Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ et $P(n + 1)$ soient vraies.
     $\forall x \in \mathbb{R},\ T_{n+2}(\cos(x)) = 2\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x))$. Par hypothèse de récurrence,
     $T_{n+2}(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos((n + 1)x) - \cos(nx) = \cos((n + 2)x)$. donc $P(n + 2)$ est vraie.
   - Conclusion: On a donc la propriété souhaitée.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $T_n(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ nx = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
   Donc les solutions de l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$ dans $[0; \pi]$ sont $\left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les nombres $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts. On en donc trouvé les n racines de T_n. D'où

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$